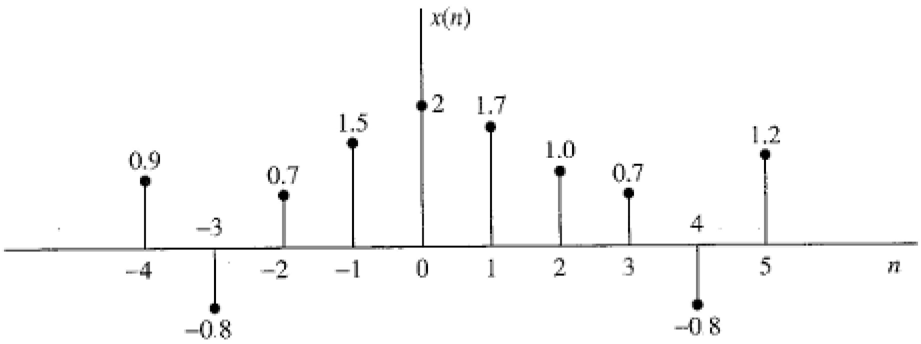
2. Sinyal Waktu-Diskret dan Sistemnya

2.1 Sinyal Waktu-Diskret

Sinyal waku diskret x(n) :



Sinyal waktu diskret didefinisikan untuk setiap nilai n integer untuk $-\infty < n < \infty$. Beberara tampilan grafik sinyal waktu diskret:

1. Tampilan dalam bentuk funsional, seperti:

$$x(n) = \begin{cases} 1, & \text{for } n = 1, 3 \\ 4, & \text{for } n = 2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

2. Tampilan dalam bentuk tabel, seperti:

n	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$x(n)$	$\cdots$	0	0	0	1	4	1	0	0	$\cdots$

3. Tampilan dalam bentuk barisan
   Suatu sinyal atau barisan durasi tak berhingga dengan waktu awal (n = 0) yang ditunjukkan dengan simbol ↑ disajikan sebagai

$$x(n) = \{\ldots 0, \underset{\uparrow}{0}, 1, 4, 1, 0, 0, \ldots\}$$

4. Suatu barisan x(n) yang bernilai nol untuk n < 0, dapat disajikan sebagai

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 4, 1, 0, 0, \ldots\}$$

Waktu awal barisan x(n) yang mempunyai nol untuk n < 0 dianggap sebagai titik awal (paling kiri) dalam barisan.

Barisan durasi berhingga dapat ditampilkan sebagai

$$x(n) = \{3, -1, \underset{\uparrow}{-2}, 5, 0, 4, -1\}$$

Sedangkan suatu barisan durasi berhingga yang memenuhi kondisi x(n) = 0 untuk n < 0 dapat ditampilkan sebagai

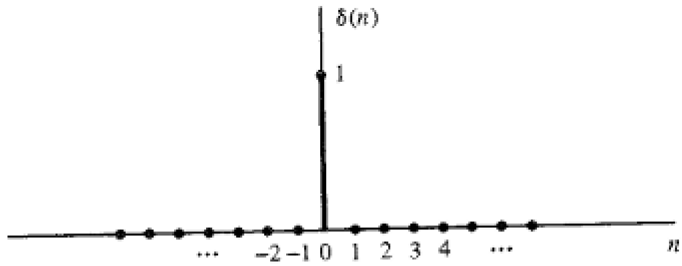
$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 4, 1\}$$

2.1.1 Beberapa Sinyal Waktu-Diskret Elementer

Dalam studi kita tentang sinyal waktu diskret dan sistem, terdapat sejumlah sinyal dasar yang sering muncul dan memainkan peran penting. Sinyal-sinyal ini didefinisikan berikut:

1. Deret cuplikan unit ditunjukkan sebagai δ(n) dan didefinisikan sebagai

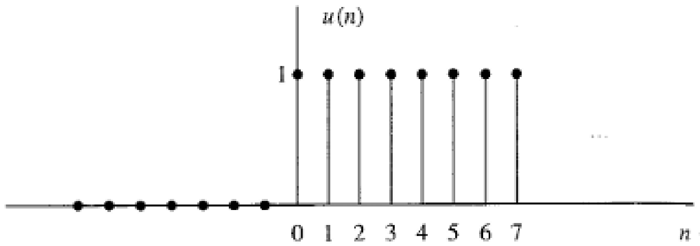
$$\delta(n) \equiv \begin{cases} 1, & \text{for } n = 0 \\ 0, & \text{for } n \neq 0 \end{cases}$$



   Sinyal tersebut kadang-kadang dirujuk sebagai impuls satuan.

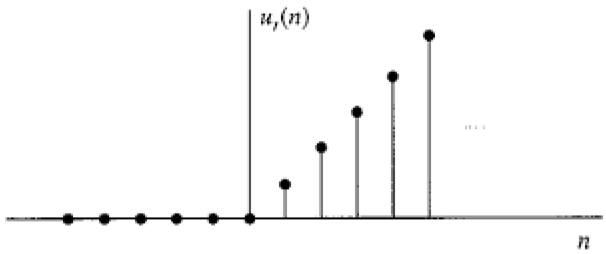
2. Sinyal ramp unit ditunjukkan dengan u(n) dan didefinisikan sebagai

$$u(n) \equiv \begin{cases} 1, & \text{for } n \geq 0 \\ 0, & \text{for } n < 0 \end{cases}$$



3. Sinyal unit ditunjukkan sebagai u(n) dan didefinisikan sebagai

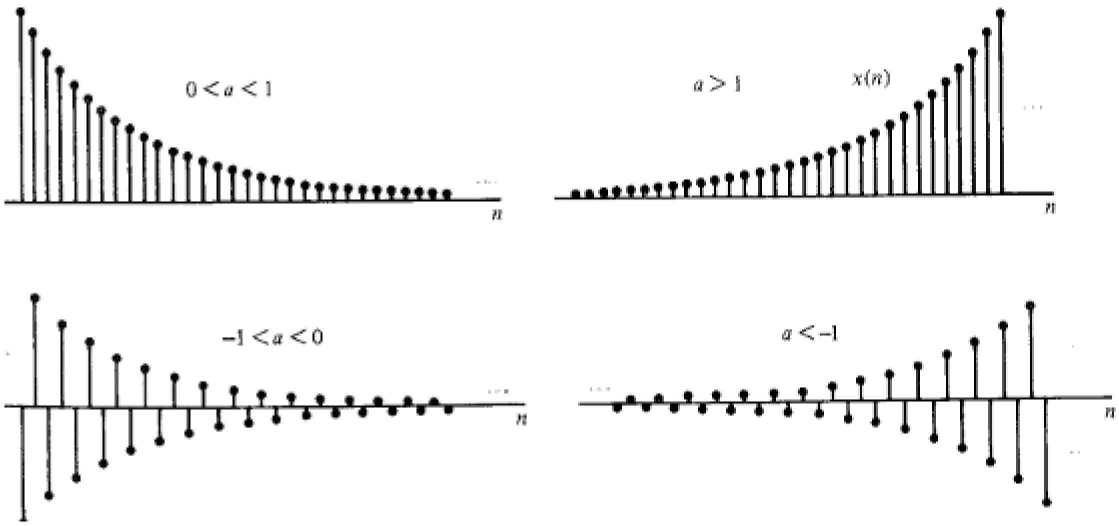
$$u(n) \equiv \begin{cases} 1, & \text{for } n \geq 0 \\ 0, & \text{for } n < 0 \end{cases}$$



4. Sinyal eksponensial adalah suatu barisan dengan bentuk

$$x(n) = a^n \qquad \text{for all } n$$

   Jika parameter a bilangan real, maka x(n) adalah sinyal real. Gambar di bawah ini mengilustrasikan x(n) untuk berbagai nilai parameter a.



Jika parameter a bernilai kompleks, dapat dinyatakn sebagai:

$a \equiv re^{j\theta}$

dengan r dan e adalah parameter sekarang. Karena itu kita dapat menyatakan x(n) sebagai

$x(n) = r^n e^{j\theta n}$

$\quad = r^n (\text{Cos } \theta n + j \text{ Sin } n\theta)$

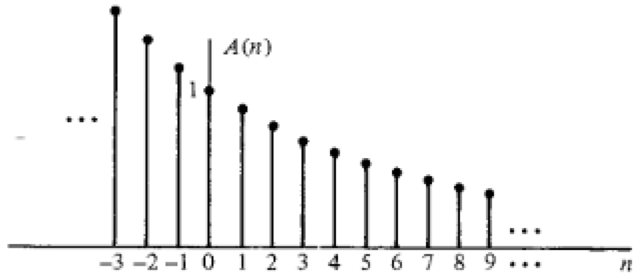
Karena x(n) sekarang bernilai kompleks, dapat ditam[ilkan secara grafis dengan mengeplot bagian real.

$X_R(n) \equiv r^n \text{ Cos } \theta n$

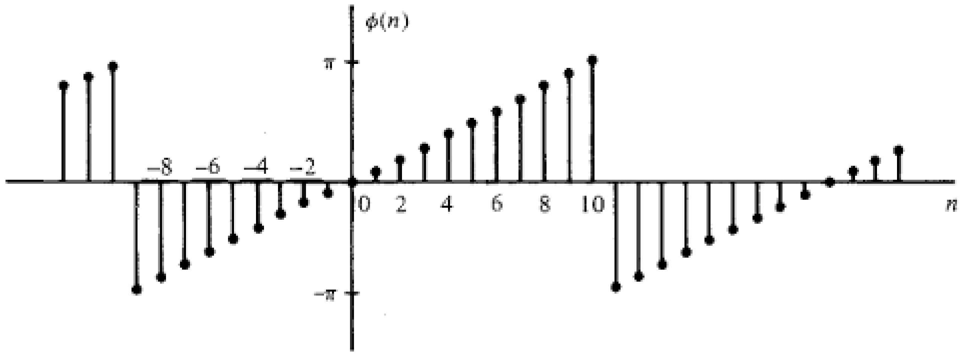
Sebagai fungsi n, dan secara terpisah menggambarkan bagian imajiner

$X_R(n) \equiv r^n \text{ Sin } \theta n$

Alternatif sinyal x(n) yang diberikan oleh persamaan $x(n) = r^n (\text{Cos } \theta n + j \text{ Sin } n\theta)$
Dapat digambarkan secara grafik dengan fungsi ampitudio $|x(n)| = A(n) \equiv r^n$



(a) Graph of $A(n) = r^n$, $r = 0.9$



(b) Graph of $\phi(n) = \frac{\pi}{10}n$, modulo 2π plotted in the range $(-\pi, \pi)$

Dan fungsi fase $-x(n) = \phi(n) \equiv \theta n$.

Gambar di atas,mengiliustrasikan A(n) dan $\phi(n)$ untuk $r = 0.9$ dan $\theta = \pi/10$. Dari hasil pengamatan fungsi fase adalah interval linear dengan n. Walaupun demikian, fase tersebut didefinisikan hanya melalui interval selang $-\pi < \theta < \pi$ atau ekuivalennya, melaui $0 \leq \theta < 2\theta$. Konsekuensinya, menurut perjanjian $\theta(n)$ diplotkan melalui interval berhingga $-\pi < \theta < \pi$ atau $0 \leq \theta < 2\theta$.

2.1.2 Klasifikasi Sinyal Waktu-Diskret

Metode matematis yang dipakai dalam analisis sinyal waktu-diskret dan sistem bergantung pada karakteristik sinyal. Dalam bagian ini, sinyal akan digolongkan sesuai dengan jumlah kaakteristik yang berbeda.

1. Sinyal energi dan Sinyal daya

   Energi E dari sinyal x(n) didefinisiakn sebagai

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

   Energi suatu sinyal dapat berhingga atau tak berhingga. Jika E berhingga (dengan kata lain, $0 < E < \infty$), maka x(n0 dinamakan <u>sinyal energi.</u> E_x adalah energi sinyal x(n).

   Banyaknya sinyal yang memiliki energi ta berhingga, mempunyai daya rata-rata berhingg. Daya rata-rata berhingga waktu-diskret x(n) didefinisikan sebagai

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

Jika energi sinyal x(n) melalui interval berhingga $-N \le n \le N$ sebagai

$$E_N \equiv \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

Maka energi dapat dinyatakan dengan

$$E \equiv \lim_{N\to\infty} E_N$$

Dan daya rata-rata sinyal x(n) sebagai

$$P \equiv \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E_N$$

Jelasnya, jika E berhingga, P= 0 sebaliknya jika E tak berhingga, daya rata-rata P mugkin berhingga atau tak berhingga. Jika P berhingga (dan bukan nol_, sinyal tersebut dinamakan sinyal daya.

Contoh:

Tentukan daya dan energi barisan step unit. Daya rata-rata sinyal step unit adalah

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} u^2(n)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{1+1/N}{2+1/N} = \frac{1}{2}$$

Konseuensinya barisan step adalah sinyal daya. Energi tak berhingga.

Dengan cara yang sama, dapat diperlihatkan bahwa deret eksponensial kompleks $x(n) = Ae^{j\omega 0n}$ mempunyai daya rata-rata A^2, sehingga ia alaha sinyal daya. Seballiknya deret ramp bukanlah salah satu dari sinyal daya atau sinyal energi.

2. Sinyal periodik dan Sinyal non-periodik
   sinyal x(n) merupakan periodik dengan periode N(N>0) jika dan hanya jika

$$x(n+N) = x(n) \text{ for all } n$$

Nilai terkecil dari N yang berpengaruh dinamakan periode (dasar/fundamental). Jika tidak ada nilai N yang memenuhi persamaan di atas, sinyal dinamakan Non-peroidik atau Aperiodik.

Sinyal sinusoida dengan bentuk

$$x(n) = A \sin 2\pi f_0 n$$

Merupakan sinyal periodik apabila f_0 merupakan bilangan rasional, yaitu jika f_0 dapat dinyatakan sebagai

$$f_0 = \frac{k}{N}$$

Dengan k dan N adalah integer

Energi sinyal periodik x(n) melalui periode tunggal, misalnya melalui interval $0 \leq n \leq N-1$, berhingga jika x(n) mengambil nilai berhingga melalui periode tersebut. Walupun demikian, energi sinyal periodiknya untuk $-\infty \leq n \leq \infty$ adalah tak berhingga. Sebaliknya, daya rata-rata sinyal periodik adalah ta berhingga dan sama dengan daya rata-rata melalui periode tunggal. Jadi jika x(n) merupakan sinyal periodik dengan periode fundamental N dan mengambil nilai-nilai berhingga, dayanya didefinisikan sebagai

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

Konsekuensinya sinyal periodik adalah sinyal daya.

3. Sinyal simetri (genap) dan asimetri (ganjil).

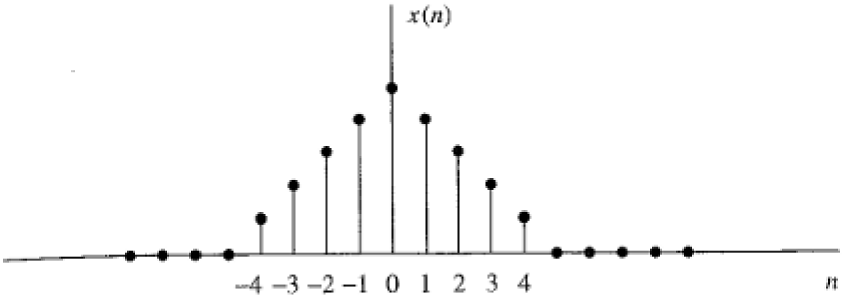
   Sinyal bernilai real x(n) dinamakan simetri (genap) jika

$$x(-n) = x(n)$$

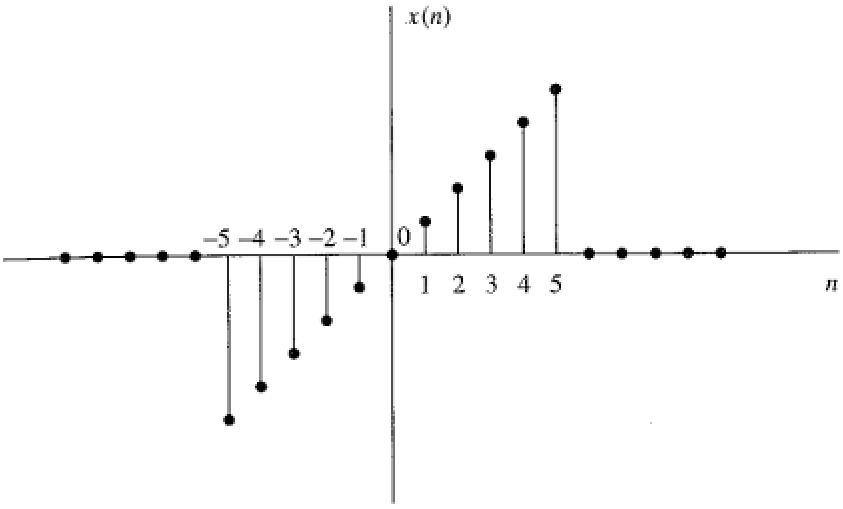
   Sebaliknya, sinyal x(n) dinamakan asimetri jika

$$x(-n) = -x(n)$$

   Contoh sinyal dengan simetri genap dan ganjil diilustrasikan pada gambar berikut:



(a)



(b)

Sinyal genap dibentuk dengan menambah x(n) ke x(-n) dan dibagi 2, yakni

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)]$$

$x_e(n)$ memenuhi kondisi simteri dengan cara yang sama, membentuk komponen sinyal yang ganjil $x_0(n)$ menurut hubungan

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)]$$

$x_0(n)$ juga memenuhi pesamaan asimetri. Jika kedua komponen sinyal $x_e(n)$ dan $x_0(n)$ ditambahkan, maka x(n) adalah

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

Jadi setipa sinyal yang berubah-ubah daat dinyatakan seperti pernyataan pada persamaan di atas.